Instruções para as provas da 2ª fase - 37ª OMU

Normas para a realização das provas

1. As equipes tem 7 dias para realizar a prova. Estimulamos que os membros das equipes interajam o máximo possível entre si.

2. Pedimos que até o final da prova, as provas não sejam disponibilizadas em mídias sociais e tampouco compartilhadas com pessoas não participantes da 37ª OMU.

3. As provas devem ser entregues **manuscritas.** **Provas escritas em editor de texto (LaTeX, Word e semelhantes) não serão corrigidas.**

4. É permitido consultar sites, livros e utilizar softwares, mas todos os materiais consultados que tenham tido alguma valia devem ser citados explicitamente nas provas. **Utilizar fontes sem fazer referência pode ser considerado plágio**.

5. É proibido consultar outras pessoas (colegas, pais, parentes, amigos, professores – inclusive o responsável pela equipe) que não sejam os próprios alunos membros da equipe. A consulta em sites e fóruns de discussão também é considerada proibida e caso identificada levará a **desclassificação da equipe**.

Sobre o envio das provas

Cada equipe deverá preparar **5 (cinco) cadernos de respostas**, um para cada uma das questões. Os cadernos serão feitos do seguinte modo:

1. Cada caderno de resposta terá **até 4 (quatro) folhas, apenas frente**, onde a equipe deverá escrever a redação final da resposta. Caso sejam enviados arquivos com mais de quatro páginas, serão corrigidas apenas as quatro primeiras.

2. A versão final da prova deve ser escrita com **caneta preta ou azul** (não lápis), para garantir melhor legibilidade.

3. As provas deverão ser digitalizadas para serem enviadas à OMU. Sugerimos que utilize algum aplicativo gratuito para digitalizar as páginas com o celular. Veja uma lista de aplicativos disponíveis aqui: https://olhardigital.com.br/dicas_e_tutoriais/noticia/os-5-melhores-apps-para-escanear-documentos-com-o-celular/106625.

4. Os arquivos devem ser escaneados **exclusivamente em formato PDF**. Para cada questão, deverá ser enviado um único arquivo PDF.

5. Digitalize as páginas na ordem correta. Como medida extra de segurança, sugerimos que, em cada página, anote no canto superior esquerdo o *nome da equipe* e no canto superior direito numere as páginas, indicando quantas foram enviadas (1/4, 2/4, 3/4 e 4/4). Com isto, se a equipe por exemplo, enviar páginas fora de ordem, existe alguma possibilidade de corrigirmos o erro.

6. No site da OMU, mediante login e senha, será possível enviar os arquivos com as respostas.

   (a) Há uma página para cada questão, onde é possível fazer o envio. Esta página é acessada através da Sala da Equipe.

   (b) Qualquer membro da equipe pode enviar as respostas, podendo ser membros diferentes para cada pergunta.

   (c) Você pode carregar suas respostas e salvá-las como rascunho. Assim, vocês evitam a tensão de ter de digitalizar e enviar todas as perguntas no último momento.

   (d) Se alguma pergunta ficar salva como rascunho, ao término do prazo de envio (13 de junho, 23h59), a última versão salva na área de sua equipe será enviada para correção.

7. Ao anexar as questões, verifique se o está fazendo no lugar correto. Questões anexadas incorretamente podem não ser corrigidas.

8. O professor orientador pode acompanhar o andamento de cada uma de suas equipes através do ambiente *"Sala do Professor"*.

(a) Na coluna com o nome da equipe, o ambiente permite que o professor visualize, para cada questão, se o envio já foi realizado, se está salva como rascunho ou se ainda não foi colocada no sistema.

(b) Nesse ambiente, o professor pode realizar o envio das provas de suas equipes. A Comissão Organizadora recomenda que cada equipe seja responsável pelo envio de sua prova, ficando o professor orientador com o papel de conferir, caso deseje.

Sobre eventuais esclarecimentos

1. Eventuais esclarecimentos a respeito das questões serão publicados em `https://www.olimpiada.ime.unicamp.br/comunicados.html?abc`. Verifique, antes de solicitar esclarecimento, se sua dúvida já está respondida no site.

2. Pedidos de esclarecimentos serão aceitos, no máximo, até quinta-feira (dia 10/06) via aba *Contato* em `https://www.olimpiada.ime.unicamp.br/?abc`. Assim, a Comissão Organizadora terá tempo hábil para analisá-los e comunicá-los a todas as equipes.

Datas referentes à prova da segunda fase

1. O acesso às provas pode ser feito a partir das **00h01 de segunda-feira, 07 de junho**, no site da OMU. Para iniciar a 2ª fase da Olimpíada, um dos membros da equipe (seja aluno ou professor) deverá clicar em "iniciar a prova", opção que ficará disponível no *painel de inscrições* para as equipes com cadastro completo dentro do prazo estipulado pela Comissão Organizadora.

2. As provas devem ser enviadas no sistema da OMU até às **23h59 de domingo, 13 de junho**. Prevendo a possibilidade de ocorrência de problemas técnicos, o sistema poderá ser reaberto, permitindo o carregamento de documentos por mais duas horas, até as 02h00 (da madrugada) do dia 14 de junho.

Segunda Prova Nível Beta - 2021

Questão 01: Aprendemos que a menor distância entre dois pontos $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3)$ no espaço $\mathbb{R}^3$ é

$$d_2(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

Mas será que existem outras formas de calcular a distância entre dois pontos? Quais propriedades uma distância deve satisfazer? É natural esperar que a distância seja sempre um número não-negativo e que a distância entre um ponto e ele mesmo seja zero. Também é esperado que a distância entre X e Y seja igual a distância entre Y e X. Por fim, a distância entre X e Y deve ser menor ou igual do que a soma da distância entre X e Z e da distância entre Z e Y, para qualquer Z no espaço (pense geometricamente o que isso significa). Na Matemática, uma função $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que satisfaz tais propriedades é chamada de *métrica*, ou seja, d é uma métrica se os três itens abaixo são satisfeitos:

- $d(X, Y) \geq 0$, para todo $X, Y \in \mathbb{R}^3$, e $d(X, Y) = 0$ se, e somente se, $X = Y$;
- $d(X, Y) = d(Y, X)$, para todo $X, Y \in \mathbb{R}^3$;
- $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$ para todo $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que a função d_2 definida no enunciado é uma métrica. Além disso, mostre que as funções d_∞ e d_1 definidas abaixo são métricas:

$$d_\infty(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|\},$$

$$d_1(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|,$$

(b) Mostre que $d_\infty(X, Y) \leq d_2(X, Y) \leq d_1(X, Y)$, para todo $X, Y \in \mathbb{R}^3$.

(c) Note que a bola B com centro $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ e raio 1 com respeito a uma métrica d pode ser descrita como sendo o conjunto dos pontos cuja distância até ponto $\mathbf{0}$ é igual a 1, ou seja, $B = \{X \in \mathbb{R}^3 : d(X, \mathbf{0}) \leq 1\}$. Mostre que a "bola" de centro $\mathbf{0}$ e raio 1 com respeito à métrica d_∞ é na verdade um cubo (a famosa bola quadrada do Quico do programa do Chaves). Determine os vértices deste cubo. Qual é a figura geométrica formada pela "bola" de centro $\mathbf{0}$ e raio 1 com respeito à métrica d_1?

Questão 02: Formamos uma sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ do seguinte modo: Escolhemos um número natural não nulo qualquer para o termo a_0. A partir disto, cada elemento da sequência é formado pela soma dos dígitos do termo anterior, ou seja,

$$\begin{gathered} a_1 \text{ é a soma dos dígitos de } a_0, \\ a_2 \text{ é a soma dos dígitos de } a_1, \\ a_3 \text{ é a soma dos dígitos de } a_2 \vdots \end{gathered}$$

e assim sucessivamente, ou seja, para $n \geq 0$, definimos a_{n+1} como sendo a soma dos dígitos de a_n.

(a) Supondo que $a_0 = 4! = 24$, determine a_{24}.

(b) Supondo que $a_0 = 6! = 720$, determine a_{720}.

(c) Assumindo que $a_0 = 2021!$ (o fatorial de 2021), determine o valor de $a_{2021!}$ (ou seja, o termo de ordem $n = 2021!$ desta sequência).

Questão 03: Seja z um número complexo:

(a) Calcule a soma

$$\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+z^3} + \frac{1}{1+z^4}$$

assumindo que $z^5 = 1$ e $z \neq 1$.

(b) Calcule o valor da soma abaixo:

$$\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+z^3} + \cdots + \frac{1}{1+z^{2020}}$$

assumindo que $z^{2021} = 1$ e $z \neq 1$.

(c) Generalize este resultado para qualquer $n \in \mathbb{N}$, ou seja, calcule a soma

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1+z^k} \tag{1}$$

assumindo que $n-1$ é par, $z \in \mathbb{C}$, $z^n = 1$ e $z \neq 1$.

Questão 04: Uma reta é um *bissetor* de uma figura $\mathcal{P}$ se ela dividir a figura $\mathcal{P}$ em dois pedaços de mesma área.

(a) Determine todas os bissetores das seguintes figuras geométricas:

- Uma circunferência.
- Um quadrado
- Um retângulo
- Um triângulo equilátero

Dada uma figura convexa $\mathcal{P}$, consideremos um bissetor dado por uma reta l. Esta reta intercepta a figura $\mathcal{P}$ (ou seu bordo) em dois pontos A, B. Chamamos o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ de M_l e o conjunto de todos estes pontos médios é denotado por $\mathbb{M}_{\mathcal{P}} := \{M_l; l \text{ bissetor de } \mathcal{P}\}$.

(b) Descreva $\mathbb{M}_{\mathcal{P}}$, onde $\mathcal{P}$ é uma circunferência, um quadrado, ou um retângulo. Demonstre suas afirmações.

(c) Descreva $\mathbb{M}_{\mathcal{P}}$, onde $\mathcal{P}$ é um polígono regular de $2n$ lados.

(d) Determine uma figura convexa $\mathcal{P}$ para a qual $\mathbb{M}_{\mathcal{P}}$ é diferente dos casos anteriores.

Questão 05: Em um tabuleiro de xadrez $n \times n$, numeramos as casas de 1 até n^2 da seguinte forma: começamos na linha superior, da esquerda para a direita, de 1 até n. A segunda linha, também da esquerda para a direta, recebe os números de $n+1$ até $2n$ e assim sucessivamente, até que a n-ésima linha é numerada de $n(n-1)+1$ até n^2.

Como exemplo, na Figura 1 temos tabuleiros 3×3 e 4×4 já numerados.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figura 1: Tabuleiros 3×3 e 4×4

Propomos um jogo que é bastante simples:

- Você escolhe uma casa para começar (a casa inicial).
- Desta casa você deve se mover à casa adjacente (esquerda, direita, acima ou abaixo) de menor valor ainda não percorrida.

Indo de uma casa para outra você percorre um caminho que termina quando chega-se a um ponto onde todas as casas adjacentes já foram percorridas. Se o seu caminho percorreu todas as n^2 casas, dizemos que a casa inicial *ganhou* e a pintamos de verde. Caso contrário, dizemos que ela *falhou* e a pintamos de vermelho.

Veja na figura (2) que o caminho começando na casa 15 falhou e o começando na 16 ganhou.

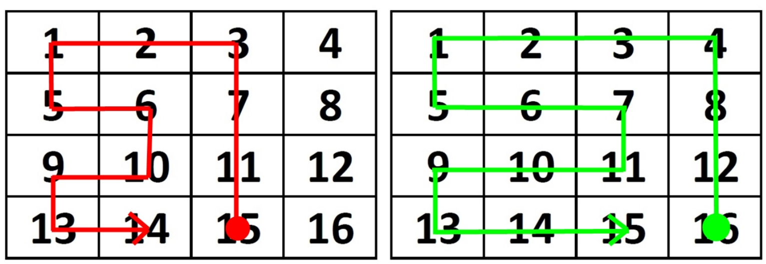

Figura 2: Exemplos de jogadas

Na figura (3) temos todas as casas pintadas em verde (ganhou) ou vermelho (falhou) em tabuleiros 3×3 e 4×4.

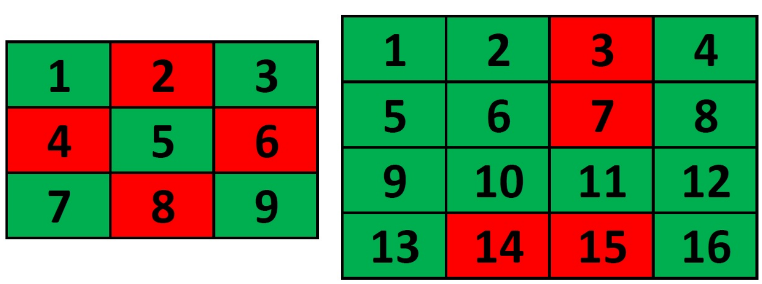

Figura 3: Casas que ganharam (em verde) e casas que falharam (em vermelho).

(a) Mostre que em um tabuleiro $n \times n$, as casas dos cantos (numeradas por $1, n, (n-1)n+1$ e n^2) são sempre verdes.

(b) Mostre que todas as casas da última linha, exceto as dos cantos, são todas vermelhas. Em outras palavras, as casas numeradas por $n(n-1)+2, n(n-1)+3, \ldots, n(n-1)+(n-1)$ são todas vermelhas.

(c) Mostre que na primeira linha do tabuleiro (as casas numeradas de 1 a n), ao menos metade das casas são verdes.

(d) Vamos considerar aqui apenas tabuleiros 3×3. Vamos supor agora que podemos numerar as casas de 1 a 9 mas em uma ordem qualquer, não necessariamente consecutiva. É possível enumerar as casas de modo que **todo** o tabuleiro fique verde? E para tabuleiros 4×4, ´´e possível enumerá-lo de maneira que ele fique todo verde? Existe mais de uma possibilidade para isto?

(e) Você consegue fazer e demonstrar alguma conjectura sobre casas verdes e vermelhas? Vale pensar em cor de casa em posição específica, proporção de casas verdes e vermelhas, tabuleiros de tamanho específico (quem sabe retangular, não necessariamente quadrados). Enuncie e justifique alguma conjectura ligada a este jogo. Se possível, tente demonstrar.