Gabarito - Terceiro Simulado (Nível Beta)

Questão 1 (20 pontos) Qual é o último dígito do número 2^{2020}?

Solução: Começamos com alguns exemplos, considerando as potências 2^n, com n inteiro positivo menor ou igual a 12. Nas tabelas abaixo temos o último dígito de cada potência destacado em vermelho.

n	2^n
1	2
2	4
3	8
4	16

n	2^n
5	32
6	64
7	128
8	256

n	2^n
9	512
10	1024
11	2048
12	4096

Estes dados nos sugerem que o último dígito de 2^n será

$$2, \text{ se } n = 4k+1 \quad (1)$$
$$4, \text{ se } n = 4k+2 \quad (2)$$
$$8, \text{ se } n = 4k+3 \quad (3)$$
$$6, \text{ se } n = 4k \quad (4)$$

onde $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$.

Estamos interessados no último dígito de 2^{2020}. Como $2020 = 4 \cdot 505$, temos que o último dígito de 2^{2020} é 6.

Se desejarmos, podemos ir um pouco além e demonstrar as relações estabelecidas em (1), (2), (3) e (4). De fato, se escrevermos $2^n = 10a_n + b_n$, onde a_n é um inteiro não negativo e $b_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, temos que b_n é o último dígito de 2^n, pois o último dígito de $10a_n$ é 0. Se considerarmos 2^{n+1}, obtemos que

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2(10a_n + b_n) = 20a_n + 2b_n.$$

Como $20a_n$ é múltiplo de 10, o último dígito de 2^{n+1} é o último dígito de $2b_n$. Demonstramos este fato por indução sobre k:

Caso inicial: Para $k = 0$, temos

$$1 = 4 \cdot 0 + 1, \qquad 2 = 4 \cdot 0 + 2,$$
$$3 = 4 \cdot 0 + 3, \qquad 4 = 4 \cdot 0 + 4$$

e temos que $b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 8$ e $b_4 = 6$.

Hipótese de indução: Assumimos que

$$b_{4k+1} = 2, \qquad b_{4k+2} = 4,$$
$$b_{4k+3} = 8, \qquad b_{4k+4} = 6.$$

Obtemos então que

$$b_{4(k+1)+1} = b_{(4k+4)+1} = \text{ último dígito de } 2 \cdot b_{4k+4} = 2 \cdot 6 = 12,$$

que é 2.

$$b_{4(k+1)+2} = b_{(4k+4+1)+1} = \text{último dígito de } 2 \cdot b_{4k+4+1} = 2 \cdot 2 = 4,$$

que é 4.

$$b_{4(k+1)+3} = b_{(4k+4+2)+1} = \text{último dígito de } 2 \cdot b_{4k+4+2} = 2 \cdot 4 = 8,$$

que é 8.

$$b_{4(k+1)+4} = b_{(4k+4+3)+1} = \text{ último dígito de } 2 \cdot b_{4k+4+3} = 2 \cdot 8 = 16,$$

que é 6.

Questão 2 (20 pontos) Seja $f(x) = x^2 + bx + c$ uma função de segundo grau, suponha que $b \in \mathbb{Z}$. Mostre que se $n \in \mathbb{Z}$ for tal que $f(f(n)) = n$ então $f(n) \in \mathbb{Z}$.

Solução: Para facilitar a notação chame $p = f(n)$. Então temos $f(n) = p$ e $f(p) = n$, ou seja

$$n^2 + bn + c = p \quad \text{e} \quad p^2 + bp + c = n.$$

Subtraindo as duas equações, obtemos:

$$(n^2 - p^2) + b(n - p) = -(n - p) \Rightarrow (n - p)(n + p + b) = -(n - p).$$

Se $n = p$, então isto significa que $f(n) = n$, que já é inteiro e, portanto, já demonstramos o que queríamos. Caso $n \neq p$, então dividindo ambos os lados da equação por $(n - p)$, obtemos

$$n + p + b = -1 \Rightarrow n + f(n) = -1 - b \Rightarrow f(n) = -1 - b - n.$$

Como $b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$, segue que $-1 - b - n \in \mathbb{Z}$, ou seja, $f(n) \in \mathbb{Z}$, como queríamos demonstrar.

Questão 3 (20 pontos) Na escola aprendemos a calcular explicitamente o seno e o cosseno de vários ângulos, como $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ e $\pi/6$. Perceberam que faltou o $\pi/5$ na sequência? Calcule $\cos(\pi/5)$ e $\sin(\pi/5)$. Aproveite e calcule também $\cos(\pi/12)$ e $\sin(\pi/12)$.

Solução: Vamos começar com a tabelinha que aprendemos na escola, deixando espaço para os novos ângulos.

	$\theta = \pi/1$	$\theta = \pi/2$	$\theta = \pi/3$	$\theta = \pi/4$	$\theta = \pi/5$	$\theta = \pi/6$
$\cos(\theta)$	-1	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	?	$\sqrt{3}/2$
$\sin(\theta)$	0	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	?	$1/2$

Nossa estratégia para calcular $\cos(\pi/5)$ será usar as fórmulas de prostaférese, que é uma palavra complicada para significar algo simples. Em grego, prosthesis significa ”adição”e aphaeresis significa ”subtração”.

Ainda não sabe do que estamos falando? Simples, são as fórmulas de cosseno e seno para adição de ângulos:

$$\begin{cases} \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \end{cases}$$

entre outras.

Da fórmula acima, obtemos que

$$\begin{cases} \cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 \\ \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \end{cases}$$

e também que

$$\begin{cases} \cos(3a) & = \cos(a+2a) \\ & = \cos(a)\cos(2a) - \sin(a)\sin(2a) \\ & = \cos(a)^3 - \cos(a)\sin(a)^2 - 2\sin(a)^2\cos(a) \\ \sin(3a) & = \sin(a+2a) \\ & = \sin(a)\cos(2a) + \sin(2a)\cos(a) \\ & = \sin(a)\cos(a)^2 - \sin(a)^3 + 2\sin(a)\cos(a)^2 \end{cases}$$

Primeiro vamos fazer a segunda parte da questão, que é um pouco mais simples, e um aquecimento para a primeira parte. Devemos calcular $\cos(\pi/12)$ e $\sin(\pi/12)$.

Note que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. Portanto

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) & = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ & = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ & = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Usando que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}$ obtemos que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Agora vamos ao $\cos(\pi/5)$. Seja $x = \pi/5$. Então $5x = \pi$ e com isto temos que

$$\cos(5x) = -1, \ \sin(5x) = 0.$$

Note que

$$\sin(5x) = \sin(3x+2x) = \sin(3x)\cos(2x) + \sin(2x)\cos(3x)$$

e portanto
$$\sin(3x)\cos(2x)+\sin(2x)\cos(3x)=0.$$

Usando as expressões acima, obtemos que

$$\begin{cases} (\sin(x)\cos(x)^2-\sin(x)^3+2\sin(x)\cos(x)^2)(\cos(x)^2-\sin(x)^2) & + \\ 2\sin(x)\cos(x)(\cos(x)^3-\cos(x)\sin(x)^2-2\sin(x)^2\cos(x)) & =0 \end{cases}$$

ou, simplificando,
$$\sin(x)\left(\sin(x)^4+5\cos(x)^4-10\sin(x)^2\cos(x)^2\right)=0.$$

Como $\sin(x)\neq 0$ (explique!), segue que

$$\sin(x)^4+5\cos(x)^4-10\sin(x)^2\cos(x)^2=0$$

Como queremos calcular $\cos(x)$, vamos trocar $\cos(x)$ por T e buscar pelo valor de T. Note que neste caso $\sin(x)^2=1-T^2$ e a equação acima fica

$$1-12T^2+16T^4=0.$$

Esta equação é biquadrada. Fazendo $S=T^2$, a equação fica

$$1-12S+16S^2=0$$

e achamos duas soluções:
$$S=\frac{3\pm\sqrt{5}}{8}.$$
Resolvendo $T^2=S$ para cada um destes valores de S, encontramos 4 possíveis valores para T:

$$T_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{4},\ T_2=\frac{1-\sqrt{5}}{4},\ T_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\ T_4=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Qual destes valores é o valor correto de $T=\cos(\pi/5)$? A função $\cos(x)$ é decrescente no intervalo $[0,\pi/2]$, portanto, como $\pi/6<\pi/5<\pi/4$, segue que $\cos(\pi/6)>\cos(\pi/5)>\cos(\pi/4)$, ou seja,

$\sqrt{3}/2 > \cos(\pi/5) > 1/2$. É fácil ver que o único dos valores acima que é maior que $1/2$ é o T_4, portanto

$$\cos(\pi/5) = T_4 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Você reconhece este número? Ele é metade da razão áurea, que aparece constantemente na natureza (e também na arquitetura), associada a simetrias.

Finalmente, podemos completar nossa tabela, lembrando que $\sin(\pi/5) = \sqrt{1-\cos(\pi/5)^2}$.

	$\theta = \pi/1$	$\theta = \pi/2$	$\theta = \pi/3$	$\theta = \pi/4$	$\theta = \pi/5$	$\theta = \pi/6$
$\cos(\theta)$	-1	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{3}/2$
$\sin(\theta)$	0	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}$	$1/2$

E sobre o $\pi/7$? Será que vamos pedir na edição 2022 da OMU para você calcular $\cos(\pi/7)$?

Pode ficar tranquilo, não iremos: acontece que $\cos(\pi/7)$ não pode ser expresso em termos de combinações de radicais de números racionais. A prova deste fato não caberia neste gabarito.

Um fato interessante, que você pode tentar demonstrar, é que $\cos(\pi/7)$ é raiz do polinômio

$$p(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1.$$

Questão 4 (20 pontos) Determine o valor mínimo da função $f(x) = x^4 + \frac{1}{x}$ para $x \in (0, \infty)$.

Solução: A média aritmética é maior ou igual a média geométrica. Usaremos essa desigualdade nos termos x^4, $\frac{1}{4x}$, $\frac{1}{4x}$, $\frac{1}{4x}$, $\frac{1}{4x}$:

$$\left(\frac{x^4 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x}}{5}\right) \geq \left(x^4 \cdot \frac{1}{4x} \cdot \frac{1}{4x} \cdot \frac{1}{4x} \cdot \frac{1}{4x}\right)^{1/5}$$

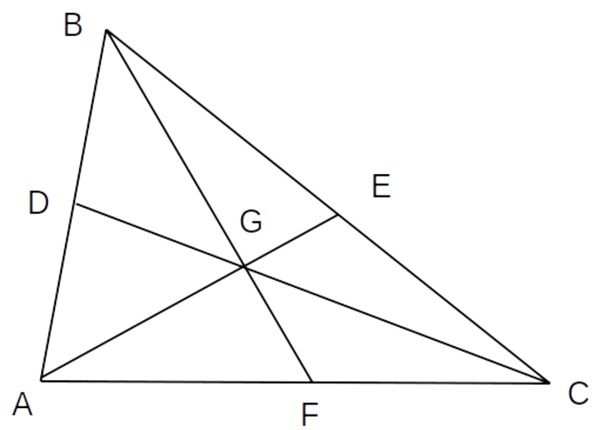
Note que

$$\left(x^4 \cdot \frac{1}{4x} \cdot \frac{1}{4x} \cdot \frac{1}{4x} \cdot \frac{1}{4x}\right)^{1/5} = \left(\frac{1}{4^4}\right)^{1/5} = 4^{-4/5}$$

Vamos agora usar o fato de que a média aritmética é igual a média geométrica apenas quando todos os termos são iguais, ou seja, $x^4 = \frac{1}{4x} = \frac{1}{4x} = \frac{1}{4x} = \frac{1}{4x}$. Assim, a igualdade $x^4 = \frac{1}{4x}$ é facilmente resolvida isolando o x e obtemos que $x = 4^{-1/5}$ é uma solução.

Vimos, portanto, que a função $f(x) \geq 4^{-4/5}$ e que esse valor é assumido quando $x = 4^{-1/5}$, assim podemos afirmar que o valor mínimo dessa função é $4^{-4/5}$.

Questão 5 (20 pontos) Na figura abaixo temos que $AF = 3$, $CE = 2$, $EB = 2$, $BD = 1$ e $DA = 2$. Além disso, o ponto G de interseção dos segmentos AE, BF e DC é interior ao triângulo ABC. Calcule a área do triângulo ABC.



Solução: Vamos denotar por A_{AGD} a área do triângulo AGD, A_{DGB} a área do triângulo DGB e assim por diante. Como os triângulos AGD e DGB tem a mesma altura então a razão entre suas áreas é igual a razão entre suas bases, ou seja,

$$\frac{A_{AGD}}{A_{DGB}} = \frac{AD}{DB}.$$

O mesmo vale para os triângulos ACD e DCB, ou seja,

$$\frac{A_{ACD}}{A_{DCB}} = \frac{AD}{DB}.$$

Lembre que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Portanto,

$$\frac{A_{AGC}}{A_{BGC}} = \frac{A_{ACD} - A_{AGD}}{A_{DCB} - A_{DGB}} = \frac{AD}{DB}.$$

Analogamente, obtém-se

$$\frac{A_{CGB}}{A_{AGB}} = \frac{FC}{AF} \quad \text{e} \quad \frac{A_{BGA}}{A_{CGA}} = \frac{EB}{CE}.$$

Portanto,

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{FC}{AF} \cdot \frac{EB}{CE} = \frac{A_{AGC}}{A_{BGC}} \cdot \frac{A_{CGB}}{A_{AGB}} \cdot \frac{A_{BGA}}{A_{CGA}} = 1.$$

O resultado acima é conhecido como Teorema de Ceva.

Usando os dados do enunciado obtemos que

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{FC}{3} \cdot \frac{2}{2} = 1$$

e, portanto, $FC = \frac{3}{2}$.

Agora, usando a Fórmula de Heron obtemos que

$$A_{ABC} = \sqrt{\frac{23}{4}\left(\frac{23}{4} - \frac{9}{2}\right)\left(\frac{23}{4} - 4\right)\left(\frac{23}{4} - 3\right)} = \frac{\sqrt{8855}}{16}.$$

Portanto, a área do triângulo ABC é $\frac{\sqrt{8855}}{16}$.