Gabarito - Terceiro Simulado (Nível Alfa)

Questão 1 (20 pontos) Um triângulo tem ângulos medindo $(x + 40)°, (2x + 20)°$ e $(3x)°$. Se o maior lado do triângulo mede 2 unidades, quanto medem os outros lados?

Solução: A soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°. Portanto, temos que

$$(x + 40) + (2x + 20) + (3x) = 180.$$

Esta equação é equivalente a

$$6x = 120,$$

ou seja, $x = 20$. Como

$$\begin{cases} x + 40 = 60, \\ 2x + 20 = 60, \\ 2x = 60, \end{cases}$$

temos que todos os ângulos medem 60°. Assim, todos os lados também devem ser iguais, e o triângulo é equilátero. Como o maior lado mede 2 unidades, todos os lados medem 2 unidades.

Questão 2 (20 pontos) Vimos no primeiro simulado da OMU em Casa que não é possível construir um triângulo retângulo com os lados sendo números primos. Agora queremos saber:

a) Existe triângulo com lados medindo $13, 7$ e 5 unidades? Por quê?

b) Quantos triângulos (não congruentes) existem com lados medindo 13 e 7 unidades e com o terceiro lado medindo um múltiplo inteiro de 5?

Solução: Certa vez, perguntado sobre o caminho mais curto para o gol, Pelé respondeu que o caminho mais curto é em linha reta, se houver algum jogador no caminho você passa ou dribla. Essa fala reflete aquilo que em matemática conhecemos como *desigualdade triangular*. Na sua forma original, a desigualdade triangular afirma simplesmente que a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é necessariamente maior que o comprimento do lado restante, ou seja, se um triângulo tem lados de comprimento a, b, c então $a+b > c$. Além disto, a recíproca da desigualdade triangular também é válida: se a, b, c são números tais que a soma de dois deles é maior que o terceiro, então existe um triângulo no plano com lados medindo a, b, c. A desigualdade triangular e sua recíproca são a chave para resolver esta questão. Para os interessados, duas observações:

- A desigualdade triangular aparece nos *Elementos de Euclides* (Livro I, proposição 20), possivelmente o mais importante livro da história da matemática, escrito por volta do ano 300 A.C.
- Podemos às vezes considerar uma desigualdade não estrita ($a + b \geq c$), mas neste caso o triângulo é *degenerado*, ou seja, tem dois ângulos nulos e um ângulo medindo 180°, sua área é zero, enfim, não é um triângulo de fato. Vale a pena destacar que a desigualdade triangular possui uma enorme gama de generalizações de acordo com diversas maneiras de medir distâncias que usamos em matemática.

Temos, portanto

a) Não existe triângulo com ângulos medindo $13, 7$ e 5, pois $5 + 7 = 12 < 13$, contradizendo a desigualdade triangular.

b) Se um triângulo tem dois lados medindo 13 e 7, pela desigualdade triangular, o terceiro lado, com medida c, deve satisfazer $7 + c > 13$, ou seja, $c > 6$ e também $7 + 13 > c$, ou seja, $c < 20$. Temos então que $6 < c < 20$ e neste intervalo existem dois múltiplos de 5, os números 10 e 15. A recíproca da desigualdade triangular garante que os triângulos de lados $7, 10, 13$ e $7, 13, 15$ existem, ou seja, temos duas soluções.

Questão 3 (20 pontos) Sejam x, y e z inteiros que satisfazem a relação $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

a) Mostre que nenhum dos números x, y e z podem ser ímpares.

b) Mostre que $x = y = z = 0$ é a única possibilidade para tais números.

Solução:

a) Temos que

- a soma de dois números ímpares é um número par;
- a soma de dois números pares é um número par;
- a soma de um número par e um número ímpar é um número ímpar;
- o produto de dois números ímpares é um número ímpar;
- o produto de dois números pares é um número par;
- o produto de um número par e um número ímpar é um número par.

Vamos dividir em dois casos:

Caso 1: Entre os números x, y, z um é ímpar e os outros dois tem a mesma paridade

Temos que o quadrado do número ímpar será um número ímpar. Com isso, ao somar esse número ímpar com a soma dos outros dois quadrados (que será um número par), teremos como resultado um número ímpar. Mas isso não é possível, pois $2xyz$ é sempre par.

Caso 2: Entre os números x, y, z dois são ímpares e um é par

Sem perda de generalidade, podemos supor que x, y são números ímpares e z é par. Com isso, existem $k, l, m \in \mathbb{Z}$ tais que $x = 2k + 1$, $y = 2l + 1$ e $z = 2m$. Logo,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(2k^2 + 2l^2 + 2m^2 + 2k + 2l + 1).$$

Por outro lado,

$$2xyz = 2(2k + 1)(2l + 1)2m.$$

Portanto, $2k^2 + 2l^2 + 2m^2 + 2k + 2l + 1 = (2k + 1)(2l + 1)2m$, o que é impossível já que o lado esquerdo é um número ímpar, enquanto o lado direito é um número par.

Logo, a única opção é que x, y, z sejam todos números pares.

b) Pelo item a) já sabemos que os números x, y, z devem ser todos pares. Logo, existem $k, l, m \in \mathbb{Z}$ tais que $x = 2k$, $y = 2l$ e $z = 2m$. Com isso, obtemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4(k^2 + l^2 + m^2) \quad \text{e} \quad 2 \cdot x \cdot y \cdot z = 16 \cdot k \cdot l \cdot m.$$

Portanto,

$$k^2 + l^2 + m^2 = 4k \cdot l \cdot m.$$

Aplicando o mesmo argumento do item a), obtemos que k, l, m devem ser todos números pares. Assim, x, y, z devem ser divisíveis por 2^2. Aplicando esse mesmo argumento n vezes, obtemos que x, y, z devem ser divisíveis por 2^n. Agora, observe que um número inteiro só pode ser divísível por $2, 2^2, 2^3, \ldots$ se for o número zero. Isso só é possível se x, y, z, forem iguais a zero.

Questão 4 (20 pontos) Considere duas retas paralelas distintas, cada uma contendo quatro pontos. Qual a probabilidade de que ao escolher 3 desses oito pontos (quatro em cada reta) aleatoriamente eles gerem um plano?

Solução: A probabilidade é calculada da seguinte forma: primeiro contamos quantas escolhas de três pontos existem (vamos chamar de A esse número), e depois analisamos quantas dessas escolhas geram um plano (vamos chamar de B esse número). Assim, a probabilidade desejada será B/A.

Vamos calcular o número A (ou seja, a quantidade de escolhas de três pontos), usando o princípio multiplicativo. Primeiro, veja que o número $8 \times 7 \times 6$ é a quantidade total de 3 pontos escolhidos, mas essa forma de escolher está levando em consideração a ordem, que para esse problema não é relevante. Por exemplo, se tivermos os pontos p, q, r, queremos ver que escolher p, q, r, nessa ordem, é o mesmo que escolher q, r, p, nessa ordem. Assim, cada tripla está representada $3 \times 2 \times 1$ vezes na conta $8 \times 7 \times 6$. Portanto, para escolher três pontos sem levar em conta a ordem, precisamos dividir pelas repetições de cada tripla, ou seja:

$$A = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

Por sua vez, para calcular o número B (ou seja, quantos planos são gerados por escolha de três pontos) basta tirarmos de A a quantidade de opções que não geram planos. Isso acontece quando os três pontos escolhidos estão inteiramente contidos em uma das duas retas. **Lembre-se:** para gerar um plano, basta termos três pontos não colineares.

Agora é fácil contar, dá para "contar na mão". Cada reta tem 4 pontos e portanto a quantidade de escolhas de 3 pontos que sejam colineares *em cada reta* é justamente 4 possibilidades. Como são duas retas, temos $4 \times 2 = 8$ escolhas de três pontos que não estão gerando um plano. Logo:

$$B = A - 8 = 48$$

Portanto, a probabilidade que buscamos é

$$\frac{B}{A} = \frac{48}{56} = \frac{6}{7}.$$

Questão 5 (20 pontos) Dado um número natural n, considere o conjunto S formado por todos os números naturais entre 1 e $2n$, ou seja, $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$. O conjunto S é dividido de forma aleatória em dois conjuntos A e B, cada um contendo n elementos de S. Denote $a_1, a_2, \ldots, a_n$ os n elementos de A e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ os n elementos de B de forma que

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n \text{ e } b_n < b_{n-1} < \ldots < b_2 < b_1.$$

Calcule

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|.$$

Solução: Consideremos o conjunto A. Considere $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_m \leq n \quad \text{e} \quad a_{m+1} > n.$$

Ou seja,

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_m \leq n < a_{m+1} < \ldots < a_n.$$

Como todos os elementos de S estão em $A \cup B$, então $n - m$ elementos de B devem ser menores do que n, já que A possui apenas m elementos inferiores (um deles podendo ser igual) a n. Assim temos

$$b_1 > b_2 > \ldots > b_m \geq n > b_{m+1} > \ldots > b_n.$$

Logo:

- para $1 \leq j \leq m$, temos $a_j \leq n \leq b_j$, o que implica: $|a_j - b_j| = b_j - a_j$;
- para $m < j \leq n$, temos $b_j \leq n \leq a_j$, o que implica: $|a_j - b_j| = a_j - b_j$.

Portanto, na soma $\sum_{j=1}^{n} |a_j - b_j| = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|$ todos os números entre 1 e n aparecem com sinal negativo e todos os números entre $n+1$ e $2n$ aparecem com sinal positivo. Ou seja, $\sum_{j=1}^{n} |a_j - b_j| = -(1 + 2 + \ldots + n) + [(n+1) + (n+2) + \ldots + 2n] = -(1 + 2 + \ldots + n) + (1 + 2 + \ldots + n) + (n + n + \ldots + n) = n \cdot n = n^2$.