



## Terceiro Simulado - Nível Alfa 26 de Junho de 2020

**Questão 1 (20 pontos)** Um triângulo têm ângulos medindo  $(x + 40)^\circ$ ,  $(2x + 20)^\circ$  e  $(3x)^\circ$ . Se o maior lado do triângulo mede 2 unidades, quanto medem os outros lados?

**Questão 2 (20 pontos)** Vimos no primeiro simulado da OMU em Casa que não é possível construir um triângulo retângulo com os lados sendo números primos. Agora queremos saber:

- Existe triângulo com lados medindo 13, 7 e 5 unidades? Por quê?
- Quantos triângulos (não congruentes) existem com lados medindo 13 e 7 unidades e com o terceiro lado medindo um múltiplo inteiro de 5?

**Questão 3 (20 pontos)** Sejam  $x, y$  e  $z$  inteiros que satisfazem a relação  $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ .

- Mostre que nenhum dos números  $x, y$  e  $z$  podem ser ímpares.
- Mostre que  $x = y = z = 0$  é a única possibilidade para tais números.

**Questão 4 (20 pontos)** Considere duas retas paralelas distintas, cada uma contendo quatro pontos. Qual a probabilidade de que ao escolher 3 desses oito pontos (quatro em cada reta) aleatoriamente eles gerem um plano?

**Questão 5 (20 pontos)** Dado um número natural  $n$ , considere o conjunto  $S$  formado por todos os números naturais entre 1 e  $2n$ , ou seja  $S = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ . O conjunto  $S$  é dividido, de forma aleatória, em dois conjuntos  $A$  e  $B$  cada um contendo  $n$  elementos de  $S$ . Denote  $a_1, a_2, \dots, a_n$  os  $n$  elementos de  $A$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n$  os  $n$  elementos de  $B$  de forma que

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n \text{ e } b_n < b_{n-1} < \dots < b_2 < b_1.$$

Calcule

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|.$$