Gabarito Primeiro Simulado 2020 - Nível Beta

Questão 1 (20 pontos) Diversos matemáticos e epidemiologistas estão trabalhando para criar modelos capazes de prever o crescimento da pandemia do Covid-19 com maior precisão utilizando os dados disponíveis. No entanto, existe um modelo matemático simples capaz de fornecer informações sobre o crescimento de uma pandemia como a do Covid-19 em seu estágio inicial com boa precisão.

(a) Suponha que o número de pessoas infectadas pelo Covid-19 no $n-$ésimo dia seja I_n, que o número médio de pessoas que alguém que está infectado entra em contato por dia seja C e que a probabilidade de alguém que foi exposto ao Covid-19 de se infectar seja P. Escreva uma fórmula para I_n em termos de C, P e I_1.

(b) Supondo que $I_1 = 1$, $C = 4$ e $P = 0,085$, calcule o número de infectados no 25º dia e no 50º dia.

(c) As medidas de isolamento social diminuem o valor de C e o hábito de lavar bem as mãos diminuem o valor de P. Supondo que a partir do 26º dia tem-se $C = 2$ e $P = 0,068$, calcule o número de infectados no 50º dia (compare com o item (b)).

Solução:

(a) No primeiro dia há I_1 pessoas infectadas. No segundo dia haverá I_1 pessoas infectadas mais o número de pessoas que essas I_1 infectaram que é igual a $C \times P \times I_1$. Logo, $I_2 = I_1 + C \times P \times I_1 = (1 + C \times P) \times I_1$. Usando o mesmo raciocínio temos que se no $n-$ésimo dia haverá I_{n-1} pessoas infectadas mais o número de pessoas que essas I_{n-1} infectaram que é igual a $C \times P \times I_{n-1}$, ou seja, $I_n = (1 + C \times P) \times I_{n-1}$. Portanto,

$$I_n = (1+C\times P)\times I_{n-1} = (1+C\times P)^2\times I_{n-2} = (1+C\times P)^3\times I_{n-3} = \ldots = (1+C\times P)^{n-1}\times I_{n-(n-1)},$$

ou seja, $I_n = (1 + C \times P)^{n-1} \times I_1$.

(b) Usando a fórmula obtida no item (a), concluímos que $I_{25} = (1 + 4 \times 0,085)^{24} = 1.123$ e $I_{50} = (1 + 4 \times 0,085)^{49} = 1.690.966$.

(c) Para calcular o número de pessoas infectadas no 50º dia considerando os novos valores de C e P a partir do 26º dia usaremos a expressão $I_{50} = (1 + C \times P)^{25} I_{25}$ com $C = 2$, $P = 0,068$ e $I_{25} = 1.123$, ou seja, $I_{50} = (1 + 2 \times 0,068)^{25} 1123 = 27.216$.

Observe que uma redução de 60% do valor do produto $C \times P$ (que passou de $0,34$ para $0,136$) representou, em apenas 25 dias, uma redução de 98% do número de infectados, passando de 1.690.966 para 27.216.

Questão 2 (20 pontos) Seja n um número natural com $n \geq 3$. Em 1637, o matemático Pierre de Fermat enunciou o seguinte resultado:

A equação $x^n + y^n = z^n$ não possui soluções para x, y, z inteiros e positivos.

O resultado foi escrito por Fermat na margem de um livro, que também escreveu: "*Descobri uma demonstração maravilhosa desta proposição que, no entanto, não cabe nas margens deste livro.*"

Passaram-se 358 anos até que alguém conseguisse uma prova para este teorema: somente em 1995 o matemático britânico Andrew Wiles conseguiu uma demonstração.

Considere a seguinte afirmação, que é a versão matricial deste teorema, com $n = 3$:

Não existem matrizes 2×2 A, B, C tais que $A^3 + B^3 = C^3$ com A, B, C matrizes não-nulas com entradas inteiras.

Esta afirmação é verdadeira?

Solução: Vamos tentar resolver este problema sem demorar 358 anos. Primeiro vamos lembrar a definição de multiplicação matricial e daí fazer alguns experimentos.

Produto matricial: O produto de duas matrizes 2×2 é definido como

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}.$$

Observamos uma propriedade fundamental deste produto: ele não é comutativo, ou seja, **a ordem dos fatores importa**. Por exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 19 \end{pmatrix}.$$

Agora vamos fazer alguns experimentos com nosso problema.

Matrizes diagonais: Se supormos que A, B, C são matrizes diagonais sem elementos nulos nas diagonais, o problema é equivalente ao Último Teorema de Fermat, e não encontraremos solução para a equação. Por exemplo, se

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

então $A^3 = B^3 + C^3$ é equivalente a $a_1^3 = b_1^3 + c_1^3$ e $a_2^3 = b_2^3 + c_2^3$ (exatamente a formulação do Último Teorema de Fermat para $n = 3$).

Matrizes com muitos zeros: Vocês já devem ter percebido que às vezes a presença de zeros nas entradas da matrizes facilita muito o cálculo para suas potências. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix},$$

enquanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

O que acontece se a matriz tiver mais entradas nulas do que entradas não-nulas? Bom, já vimos que se a entrada não-nula estiver na diagonal, teremos problemas. E se ela estiver fora, ou seja, for uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Neste caso é fácil calcular potências. Verifique que A^2 já é a matriz nula (todas as entradas iguais a zero), e portanto o mesmo acontecerá com A^3.

Resolvemos nosso problema! A resposta é falsa: existem matrizes A, B, C que satisfazem o Teorema. Podemos, por exemplo, pegar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

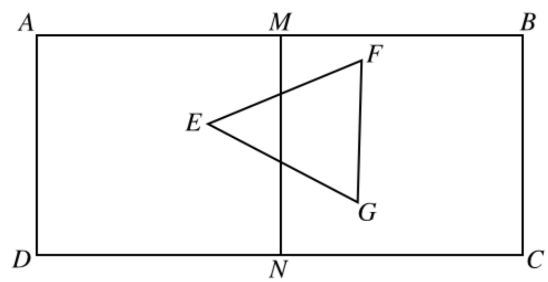
Como

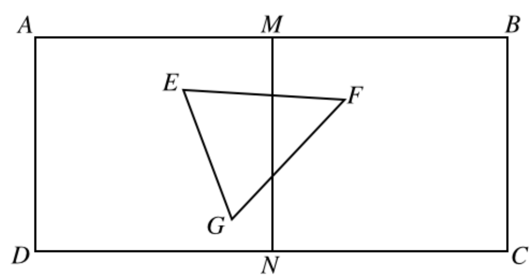
$$A^3 = B^3 = C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então teremos $A^3 = B^3 + C^3$. Ou seja, esta versão matricial do Último Teorema de Fermat **é falsa**. As matrizes D tais que D^k é a matriz nula, para algum valor de $k \geq 2$, são chamadas matrizes nilpotentes.

Questão 3 (20 pontos) Considere um retângulo $ABCD$. Sejam M o ponto médio do lado AB e N o ponto médio do lado CD, o qual é oposto ao lado AB. Seja EFG um triângulo cujos vértices se localizam no interior de $ABCD$, determine a probabilidade de que o segmento MN corte dois lados do triângulo EFG.

Solução: Observe que a única maneira de MN cortar dois lados do triângulo é que um dos vértices esteja em uma das metades e os outros dois estejam em outra, ou seja, precisamos calcular a probabilidade de os três vértices não estarem todos em $AMND$ ou em $MBCN$.





A probabilidade de um ponto estar no lado esquerdo é a mesma probabilidade de estar no lado direito que é $1/2$. Assim a probabilidade de termos três pontos do lado esquerdo é $(1/2)^3 = 1/8$ e de três estarem do lado direito é $(1/2)^3 = 1/8$. Assim a probabilidade de que os três pontos não estejam todos de um mesmo lado é:

$$1 - 2 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

Portanto, a probabilidade de que o segmento MN corte dois lados do triângulo EFG é $3/4$.

Questão 4 (20 pontos) Suponha que $m = p_1 \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \dots p_r^{n_r}$, onde p_i é primo, para todo $i = 1, \dots r$, $p_1 > p_2 > \dots > p_r$ e $n_i \geq 1$, para todo $2 \leq i \leq r$. Dizemos que m *admite uma decomposição* $[p, q]$ se a equação $m = p \cdot p_1 + q$ admite uma solução com p e q primos.

(a) Mostre que 2020 admite uma decomposição $[p, q]$.

(b) Mostre que se m admite uma decomposição $[p, q]$ então m é múltiplo de 2 ou $m = 3 \cdot p_1$.

Solução:

(a) Para sabermos se um número m admite uma decomposição $[p, q]$ precisamos seguir os seguintes passos:

 (i) Encontrar sua decomposição em fatores primos, $m = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$, com $p_1 > p_2 > \dots > p_r$ e $n_i \geq 1$.

 (ii) Se $n_1 > 1$, então m não possui decomposição $[p, q]$ (independente dos primos p, q).

 (iii) Se $n_1 = 1$ devemos dividir m por p_1 e verificar o quociente e o resto:

  ∗ se estes forem ambos primos, digamos p, q, então m admite decomposição $[p, q]$,

  ∗ caso o resto seja zero e o quociente, digamos d, seja o sucessor de um primo, i.e., se $d - 1$ for primo, então m admite decomposição $[d - 1, p_1]$.

Aplicando este algoritmo a 2020 obtemos que $2020 = 101 \cdot 5 \cdot 2^2$. Como n_1 (a potência do primo 101) é 1, efetuamos a divisão: $2020 = 19 \cdot 101 + 101$, portanto 2020 admite decomposição $[19, 101]$.

(b) De modo geral, seja $m = p_1 p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$ onde assumimos que $r > 2, p_1 > p_2 > \dots > p_r$ e $n_i \geq 1$, para todo $2 \leq i \leq r$. Supondo $m = p \cdot p_1 + q$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= m - (p \cdot p_1 + q) \\ &= p_1 p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r} - (p \cdot p_1 + q) \\ &= p_1 (p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r} - p) - q \end{aligned}$$

ou, equivalentemente

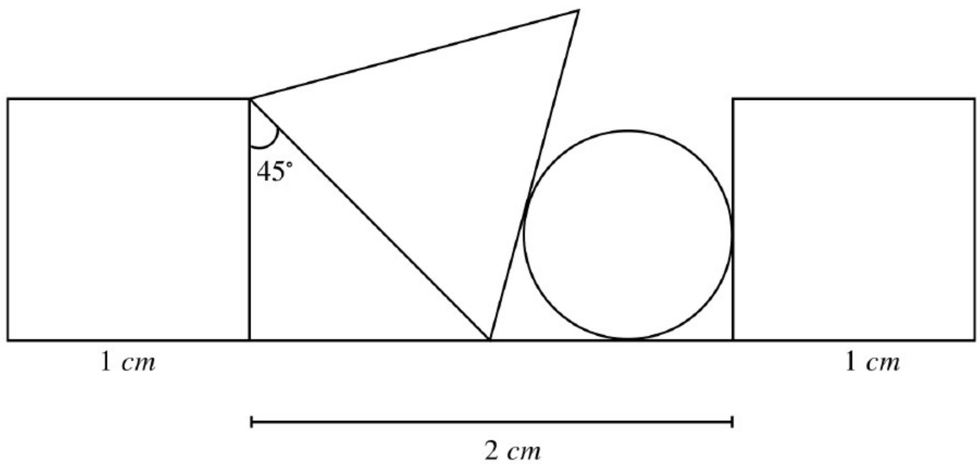
$$q = p_1 (p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r} - p)$$

Como q é primo, devemos ter $p_1 = q$ e $p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r} - p = 1$, donde segue que $p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r} = p + 1$. Temos então duas possibilidades:

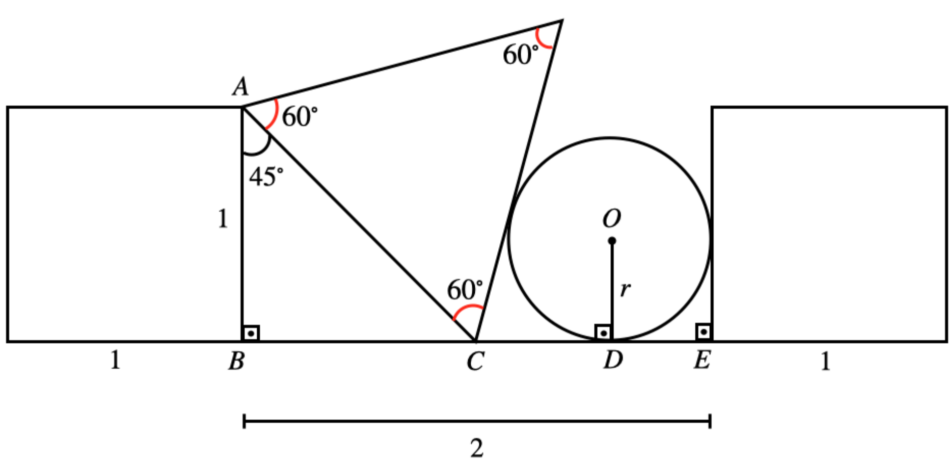
- Se p é (primo) ímpar, então $p + 1 = p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$ é par, e portanto m é par.
- Se p é (primo) par, então $p = 2$, ou seja, $3 = p + 1 = p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$, donde segue que

$$m = p_1(p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}) = p_1 \cdot 3.$$

Questão 5 (20 pontos) A figura a seguir contém dois quadrados, cada um com lados de tamanho 1 cm, um triângulo equilátero e uma circunferência tangenciando o triângulo e um dos quadrados. Utilizando as informações contidas na figura, calcule o raio da circunferência.



Solução: Primeiramente iremos marcar alguns pontos na figura para podermos organizar melhor a solução. Considere A, B, C e E os pontos marcados na figura abaixo, O o centro da circunferência e D o ponto de tangência da circunferência com o segmento $\overline{BE}$. Como o triângulo da figura é equilátero, já marcamos o valor de cada um de seus ângulos internos que é de $60°$.



No triângulo ABC sabemos que

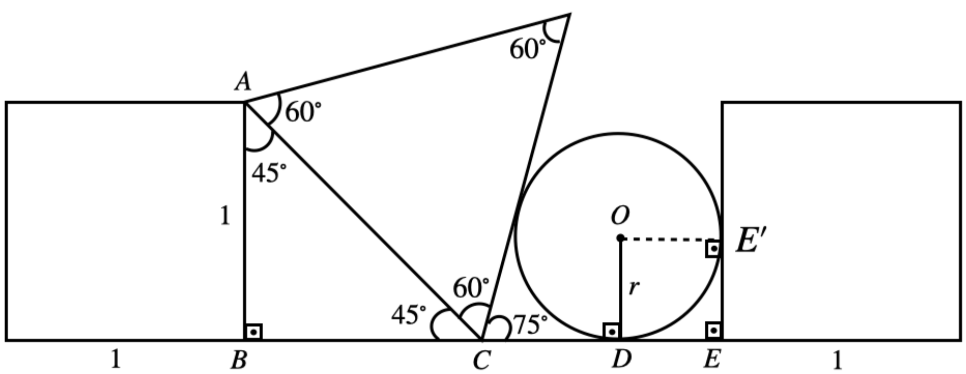
$$\angle BCA + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle BCA = 45^\circ.$$

Em particular o triângulo ABC é isósceles e, portanto, $BC = AB = 1$ cm. Vamos agora calcular CD. Considere r o raio da circunferência. Seja E' o ponto de interseção da circunferência com o quadrado da direita. Temos que $OE' = DE$, pois OE' é perpendicular ao lado do quadrado e $OE' = OD = r$ o que faz com que $ODEE'$ seja um quadrado. Ou seja,

$$OE' = DE = r.$$

Assim,

$$CD = 2 - DE - BC = 2 - 1 - r = 1 - r.$$



Seja D' o ponto de interseção entre a circulo e o triângulo equilátero, então

$$\angle DCD' + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle DCD' = 75^\circ.$$

Agora observemos que, como C é um ponto externo à circunferência, o segmento $\overline{OC}$ é bissetriz do ângulo $\angle DCD'$. Logo $\angle DCO = \frac{75^\circ}{2}$.

Assim, olhando para o triângulo retângulo CDO temos

$$\tan\left(\frac{75^\circ}{2}\right) = \frac{r}{1-r} \Rightarrow r = \frac{\tan\left(\frac{75}{2}^\circ\right)}{1 + \tan\left(\frac{75}{2}^\circ\right)}.$$

Assim, basta calculamos $\tan\left(\frac{75^\circ}{2}\right)$ e substituirmos na última expressão. Para fazer isto primeiro calcularemos a tangente de 75° e depois, utilizando a tangente do dobro de um arco, calcularemos a tangente de $75^\circ/2$. Lembremos que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}.$$

Logo, tomando $a = 30^\circ$ e $b = 45^\circ$ temos:

$$\begin{aligned}\tan(75^\circ) &= \tan(30^\circ + 45^\circ)\\ &= \frac{\tan(30^\circ) + \tan(45^\circ)}{1 - \tan 30^\circ \cdot \tan(45^\circ)}\\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Finalmente, tomando $a = b = 75^\circ/2$ temos:

$$\tan(75^\circ) = \frac{2\tan\left(\frac{75^\circ}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{75^\circ}{2}\right)} \Rightarrow \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{2\tan\left(\frac{75^\circ}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{75^\circ}{2}\right)}.$$

Assim,

$$(3+\sqrt{3}) \cdot \tan^2\left(\frac{75^\circ}{2}\right) + 2 \cdot (3-\sqrt{3}) \cdot \tan\left(\frac{75^\circ}{2}\right) - (3+\sqrt{3}) = 0.$$

Esta é uma equação do segundo grau na variável $\tan\left(\frac{75^\circ}{2}\right)$. Assim, por Bhaskara temos:

$$\tan\left(\frac{75^\circ}{2}\right) = \frac{-2(3-\sqrt{3}) \pm \sqrt{2^2(3-\sqrt{3})^2 + 4 \cdot (3+\sqrt{3})^2}}{2(3+\sqrt{3})}.$$

Ou seja,

$$\tan\left(\frac{75^\circ}{2}\right) = \frac{-3+\sqrt{3} \pm 2\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}.$$

Agora, como $\tan\left(\frac{75^\circ}{2}\right) > 0$ então precisamos identificar qual dos valores dados na última expressão é positivo. Observe que

$$\sqrt{3} < 3 \Rightarrow 3 - \sqrt{3} < 0 \Rightarrow -3 + \sqrt{3} - 2\sqrt{6} < 0,$$

logo

$$\tan\left(\frac{75^\circ}{2}\right) = \frac{-3+\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2.$$

Assim, concluímos que

$$r = \frac{\tan\left(\frac{75}{2}^\circ\right)}{1+\tan\left(\frac{75}{2}^\circ\right)} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2}{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}.$$