Gabarito Primeiro Simulado 2020 - - Nível Alfa

Questão 1 (20 pontos) Maria e seus amigos estão brincando de um jogo de perguntas. A cada rodada Maria deve responder uma pergunta, quando ela acerta ganha 5 pontos e quando erra perde 3 pontos. Depois de 15 rodadas Maria está com 51 pontos. Quantas perguntas Maria acertou e quantas errou?

Solução: Chamemos de a a quantidade de perguntas que Maria acertou e b a quantidade que ela errou. Sabemos que no total foram 15 perguntas (e 15 respostas), logo $a + b = 15$.

Como cada acerto vale 5 pontos positivos e cada erro 3 pontos negativos, temos que o total de pontos feitos, 51, é fruto da soma $5a - 3b = 51$.

Temos então um sistema linear de duas equações:

$$\begin{aligned} a + b &= 15 \\ 5a - 3b &= 51 \end{aligned}$$

Assim, basta resolver esse sistemas. Temos $a = 15 - b$ substituindo na segunda equação temos

$$5(15 - b) - 3b = 51 \Rightarrow 8b = 75 - 51 \Rightarrow b = 3.$$

Portanto, $a = 15 - b = 15 - 3 = 12$. Ou seja, <u>Maria acertou 12 questões e errou 3</u>.

Observação: Vale sempre a pena conferir: obtivemos que $a = 12$ e $b = 3$ e estes valores de fato satisfazem o sistema de equações: $12 + 3 = 15$ e $5 \cdot 12 - 3 \cdot 3 = 51$.

Questão 2 (20 pontos) João tem 5 pares de tênis $\{T_1, T_2, \ldots, T_5\}$, 10 bermudas $\{B_1, B_2, \ldots, B_{10}\}$ e 10 camisetas $\{C_1, C_2, \ldots, C_{10}\}$. Mas quando João veste o par de tênis T_1 ele não usa as bermudas $B_1, \ldots, B_5$. E quando usa a bermuda B_1 ele não usa as camisetas $C_1, \ldots, C_5$. Quantas combinações possíveis de vestimenta João tem à sua disposição?

Solução: Vamos contar a quantidade total de possibilidades e retirar a quantidade de combinações proibidas. A quantidade total de combinações é $5 \times 10 \times 10 = 500$.

Agora vamos calcular quantas possibilidades são as proibidas. Iniciemos com:

a) Note que a quantidade de combinações de roupas com o tênis T_1, qualquer uma das bermudas $B_1, \ldots, B_5$ e qualquer camiseta $C_1, \ldots, C_{10}$ é $1 \times 5 \times 10 = 50$.

b) Note que a quantidade de combinações de roupas com qualquer um dos tênis $T_1, \ldots, T_5$, a bermuda B_1, qualquer uma das camisetas $C_1, \ldots, C_5$ é $5 \times 1 \times 5 = 25$.

Somando $50 + 25 = 75$ nós quase temos o número de possibilidades proibidas, mas perceba que existem situações que acontencem tanto no item a quanto no item b acima e essas possibilidades acabaram sendo somadas duas vezes. Então a quantidade de possibilidades proibidas deve ser 75 menos a quantidade da interseção das combinações das possibilidades que acontecem no item a e no item b. Mas a interseção são as combinações que possuem todas as propriedades dos itens a e b: todas as vestimentas com o tênis T_1, com a bermuda B_1 e qualquer uma das camisetas $C_1, \ldots, C_5$. Assim essa interseção tem $1 \times 1 \times 5 = 5$ possibilidades.

Portanto, a quantidade de combinações proibidas é $75 - 5 = 70$. Logo a quantidade de combinações de vestimenta que João tem a disposição é: $500 - 70 = 430$.

Questão 3 (20 pontos) Mostre que não existe um triângulo retângulo cujas medidas dos lados sejam números primos.

Solução: Suponha que exista um triângulo retângulo com lados medindo p, q, r, onde p, q, r são números primos.

Como o triângulo é retângulo, um dos lados precisa ser maior que os outros dois, então vamos supor que $p \geq q$ e $p \geq r$. Assim, o lado que mede p é a hipotenusa e o Teorema de Pitágoras nos diz que

$$p^2 = q^2 + r^2. \tag{1}$$

Se p for par, deveremos ter $p = 2$, que é único primo par. Assim a equação (1) ficaria

$$4 = q^2 + r^2,$$

e esta equação não tem solução para q, r primos positivos (teste os casos!).

Se q for par, então $q = 2$ e a equação (1) fica $p^2 = 4 + r^2$, ou $p^2 - r^2 = 4$. Fatorando, obtemos

$$(p - r)(p + r) = 4.$$

Portanto, $p - r$ e $p + r$ são divisores de 4. Como as únicas formas de escrever 4 como produto de dois inteiros positivos são 2×2 e 1×4, temos as opções

$$p - r = 2, \ p + r = 2 \tag{2}$$

ou

$$p - r = 1, \ p + r = 4 \tag{3}$$

ou

$$p - r = 4, \ p + r = 1. \tag{4}$$

- (2) não é verdade, pois se fosse, somando as equações obteríamos $p = 2$ e daí a equação (1) ficaria $4 = 4 + r^2$, o que implicaria $r = 0$, o que é falso.
- (3) e (4) também não podem ser verdadeiras, pois daí teríamos $2p = 5$, e com isto p não seria inteiro.

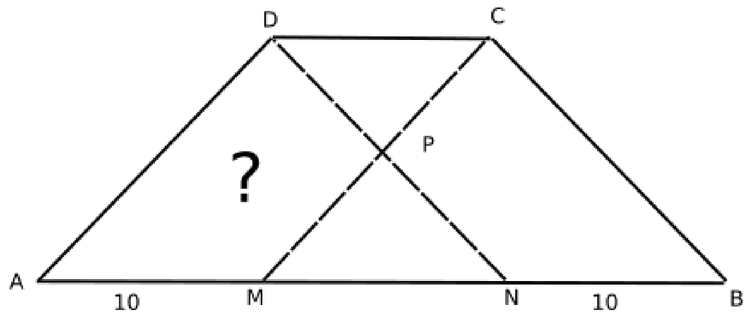
O mesmo argumento garante que r também não pode ser par. Portanto, os números p, q, r são ímpares.

Sendo assim, observando novamente a equação (1) temos

$$p^2 = q^2 + r^2.$$

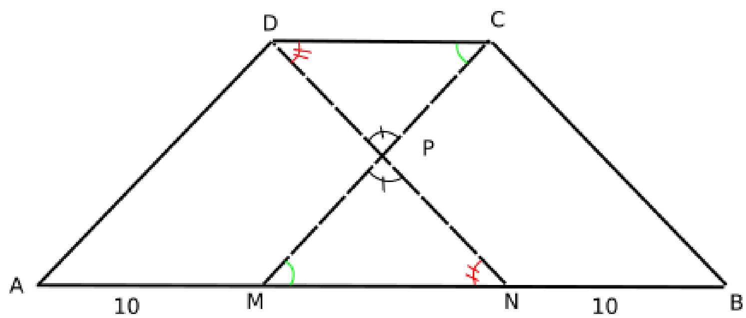
Note que do lado esquerdo temos o quadrado de um ímpar, que é ímpar; do lado direito temos a soma de dois quadrados de ímpares, portanto a soma de dois ímpares, que é um número par. Isto esgota todos os casos e daí não pode existir um tal triângulo.

Questão 4 (20 pontos) Considere um trapézio isósceles $ABCD$. Sejam M e N os pontos no segmento AB tais que os segmentos MC e AD sejam paralelos e os segmentos ND e BC sejam paralelos. Denote por P o ponto de interseção dos segmentos ND e MC (veja a figura abaixo). Dado que a área do trapézio é igual a 200, que o comprimento de ambos os segmentos AM e NB é igual a 10 e que a altura do trapézio também é igual a 10, calcule a área do quadrilátero $AMPD$.



Solução: Note que a área do quadrilátero $AMPD$ é igual a área do trapézio $AMCD$ menos a área do triângulo CDP. O problema então se resume a calcular essas duas áreas. Note que, como AD é paralelo a MC e AM é paralelo a DC (pois $ABCD$ é um trapézio) então o comprimento do segmento DC é igual a 10. Com isso concluímos que a área do trapézio $AMCD$ é igual a $\frac{10\times(10+10)}{2} = 100$.

Vamos agora estudar o triângulo CDP. Usando que os ângulos alternos internos são congruentes obtemos que as congruências dos ângulos $C\hat{D}P$ com $P\hat{N}M$; $P\hat{C}D$ com $N\hat{M}P$. Além disso, os ângulos $C\hat{P}D$ e $M\hat{P}N$ são congruentes pois são opostos pelo vértice. Veja a figura abaixo.



Isso mostra que os triângulos MPN e CDP são similares. Vamos provar que eles são na verdade congruentes. Para isso basta verificarmos que $\overline{MN} = 10 = \overline{DC}$. Como a área do trapézio $ABCD$ é igual a 200 temos que

$$\frac{(10+\overline{MN}+10)+10}{2}\times 10 = 200.$$

Resolvendo a equação obtemos que $\overline{MN} = 10$, de onde segue que os triângulos MPN e CDP são congruentes. Denote por h_1 a altura do triângulo MPN com respeito à base MN e h_2 a altura do triângulo CDP com respeito à base DC e note que pela congruência dos triângulos obtemos que $h_1 = h_2$. Além disso, $h_1 + h_2$ é igual a altura do trapézio, ou seja, $h_1 + h_2 = 10$. Portanto, $h_1 = h_2 = 5$. Logo, a área do triângulo CDP é igual a $10 \times 5/2 = 25$. Portanto, a área do quadrilátero $AMPD$ é igual a 75.

Questão 5 (20 pontos) Ana, Beatriz e Carol são trigêmeas que moram juntas. Por terem o mesmo biotipo todas comem o mesmo tanto e quando vão ao supermercado compram uma certa quantidade de comida que dura quatro semanas. Cada uma tem uma rotina diferente por causa do trabalho. De tudo que Ana e Beatriz comem no mês 60% é a comida de casa, já Carol de tudo que come no mês 30% é a comida de casa. Ana, Beatriz e Carol foram ao supermercado e compraram a mesma quantidade de comida que sempre compram quando vão ao supermercado. Mas agora por causa da quarentena quanto tempo irá durar essa comida uma vez que todas comerão o tempo todo em casa?

Solução: Digamos que a quantidade total de comida que cada uma consome no mês é α Kg. Fora da quarentena a quantidade de comida total feita em casa é $0,6\alpha + 0,6\alpha + 0,3\alpha = 1,5\alpha$. Assim temos que $1,5\alpha$ kg de comida é consumida em 30 dias. Portanto, as três estando em casa comerão o dobro de comida pois $\alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$. Portanto se juntas elas comem duas vezes mais, o tempo cairá pela metade. Portanto levarão 2 semanas para comer toda a comida do mês.