Primeiro Simulado - Nível Beta
27 de Abril de 2020

Questão 1 (20 pontos) Diversos matemáticos e epidemiologistas estão trabalhando para criar modelos capazes de prever o crescimento da pandemia do Covid-19 com maior precisão utilizando os dados disponíveis. No entanto, existe um modelo matemático simples capaz de fornecer informações sobre o crescimento de uma pandemia como a do Covid-19 em seu estágio inicial com boa precisão.

(a) Suponha que o número de pessoas infectadas pelo Covid-19 no $n-$ésimo dia seja I_n, que o número médio de pessoas que alguém que está infectado entra em contato por dia seja C e que a probabilidade de alguém que foi exposto ao Covid-19 de se infectar seja P. Escreva uma fórmula para I_n em termos de C, P e I_1.

(b) Supondo que $I_1 = 1$, $C = 4$ e $P = 0,085$, calcule o número de infectados no 25º dia e no 50º dia.

(c) As medidas de isolamento social diminuem o valor de C e o hábito de lavar bem as mãos diminuem o valor de P. Supondo que a partir do 26º dia tem-se $C = 2$ e $P = 0,068$, calcule o número de infectados no 50º dia (compare com o item (b)).

Questão 2 (20 pontos) Seja n um número natural com $n \geq 3$. Em 1637, o matemático Pierre de Fermat enunciou o seguinte resultado:

A equação $x^n + y^n = z^n$ não possui soluções para x, y, z inteiros e positivos.

O resultado foi escrito por Fermat na margem de um livro, que também escreveu: "*Descobri uma demonstração maravilhosa desta proposição que, no entanto, não cabe nas margens deste livro.*"

Passaram-se 358 anos até que alguém conseguisse uma prova para este teorema: somente em 1995 o matemático britânico Andrew Wiles conseguiu uma demonstração.

Considere a seguinte afirmação, que é a versão matricial deste teorema, com $n = 3$:

Não existem matrizes 2×2 A, B, C tais que $A^3 + B^3 = C^3$ com A, B, C matrizes não-nulas com entradas inteiras.

Esta afirmação é verdadeira?

Questão 3 (20 pontos) Considere um retângulo $ABCD$. Sejam M o ponto médio do lado AB e N o ponto médio do lado CD, o qual é oposto ao lado AB. Seja EFG um triângulo cujos vértices se localizam no interior de $ABCD$, determine a probabilidade de que o segmento MN corte dois lados do triângulo EFG.

Questão 4 (20 pontos) Suponha que $m = p_1 \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \ldots p_r^{n_r}$, onde p_i é primo, para todo $i = 1, \ldots r$, $p_1 > p_2 > \ldots > p_r$ e $n_i \geq 1$, para todo $2 \leq i \leq r$. Dizemos que m *admite uma decomposição* $[p, q]$ se a equação $m = p \cdot p_1 + q$ admite uma solução com p e q primos.

(a) Mostre que 2020 admite uma decomposição $[p, q]$.

(b) Mostre que se m admite uma decomposição $[p, q]$ então m é múltiplo de 2 ou $m = 3 \cdot p_1$.

Questão 5 (20 pontos) A figura a seguir contém dois quadrados, cada um com lados de tamanho 1 cm, um triângulo equilátero e uma circunferência tangenciando o triângulo e um dos quadrados. Utilizando as informações contidas na figura, calcule o raio da circunferência.